

Olimpiai szakköri feladatok – 2016. január 11.

„Elvek” a fizikában

A Fermat-elv szokásos megfogalmazása: A fénysugár egy tetszőleges optikai rendszerben mindig olyan pályát követ, amelyre nézve a kezdő és végpontok közötti terjedési idő $\left(\sum n(\mathbf{r})|\Delta\mathbf{r}|\right)$ a lehető legkisebb értéket veszi fel.

1. Mutassuk meg, hogy egy síkfelülettel elválasztott két (különböző törésmutatójú) féltér esetében a Fermat-elv a fényvisszaverődés és a fénytörés ismert törvényeivel egyenértékű.

A Fermat-elv általánosabb megfogalmazása: A fénysugár egy tetszőleges optikai rendszerben mindig olyan pályát követ, amelyre nézve a kezdő és végpontok közötti terjedési idő minimális vagy maximális.

2. Mutassuk meg, hogy egy R sugarú gömbtükrő optikai tengelyén t és k távolságban lévő pontok közötti terjedési időnek szélsőértéke van a tengely mentén egyenesen terjedő (és a tükörről visszaverődő) fénysugarakra akkor, ha

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{2}{R},$$

és a szélsőérték *maximum*.

A Fermat-elv helyes megfogalmazása: A fénysugár egy tetszőleges optikai rendszerben mindig olyan pályát követ, amely pályára nézve a kezdő és végpontok közötti terjedési idő „extremális”, vagyis a tényleges pályától csak nagyon kicsit (egy kicsiny ϵ -nal arányos mértékben) eltérő pályákra az időkülönbség első közelítésben (ϵ első hatványáig) *nulla*.

A Huygens–Fresnel-elv: Minden olyan pont, ahová egy hullám elért, elemi hullámok kiindulópontjának tekinthető, és egy későbbi időpontban észlelt hullámjelenséget ezen elemi hullámok interferenciája határozza meg.

3. Mutassuk meg, hogy $\lambda \rightarrow 0$ (geometriai optikai) határesetben (vagyis amikor a hullámhossz sokkal kisebb, mint a leképezésben szerepet játszó többi méret) a Huygens–Fresnel-elvből következik a Fermat-elv.

4. Egy R sugarú tükrös csillagászati távcső segítségével egy távoli (pontszerű) csillag képét állítjuk elő a fókusz síkban. A fény véges hullámhossza miatt a kép nem pontszerű. A kép méretét Huygens–Fresnel-elv segítségével becsülhetjük meg. Mekkora ez a méret?

Útmutatás. Keressük meg a fókusz sík azon pontjait, amelyekbe érkező fény terjedési ideje nem pontosan ugyanakkora, de az eltérés nem nagyobb, mint – mondjuk – a periódusidő negyede. Ezek a hullámok nem teljesen erősítik, de nem is oltják ki egymást.

5. Az előző feladat eredményét felhasználva számítsuk ki a távcső szögfelbontását, vagyis azt a legkisebb szöveget, amelyben látszó két csillag még megkülönböztethető a távcsővel.

6. Határozzuk meg egy $N \gg 1$ vonalat tartalmazó optikai rács felbontóképességét, vagyis azt a $\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}$ arányszámot, amelynél nagyobb relatív hullámhossz-különbség esetén két különböző hullámhosszúságú fény keveréke a spektroszkóppal szétválasztható.

Útmutatás. Ismét a Huygens–Fresnel-elvet alkalmazhatjuk. Ha az egyes résekből érkező hullámok valamilyen továbbhaladási irányban nincsenek is pontosan azonos fázisban, de még a két legjobban eltérő fázisú hullám sem oltja ki egymást, a spektroszkóp gyengébben ugyan, de továbbengedi a fényt.

Kitekintés: A newtoni fizika egyik lehetséges átfogalmazása: Egy tömegpont – amelyik t_1 időpillanatban x_1 helyről indulva t_2 időpillanatban x_2 helyre érkezik – az összes elképzelhető $x(t)$ függvény közül azt „választja”, amelyre a mozgási és helyzeti energiájának különbsége a mozgás teljes időtartamára átlagolva extrémális. (Ezt az elvet szokták a legkisebb hatás elvének (LHE) is nevezni, jóllehet az extremum általában nem minimum.) Ellenőrizzük ezt az elvet egy szabadon eső testre úgy, hogy – az egyszerűség kedvéért – nem az összes elképzelhető $x(t)$ függvényt vizsgáljuk, hanem csak a legfeljebb másodfokúakat.

A LHE nagyon hasonló a Fermat-elvhez. Vajon van-e a mechanikában is a Huygens–Fresnel-elvhez hasonló hullámterjedési elv (hullámmechanika), aminek kicsiny hullámhosszúságú határeset a LHE-t, vagyis a klasszikus mechanika törvényeit adja vissza? (Eláruljuk: *van*, és ezt hullámmechanikának, másnéven kvantummechanikának nevezik.)

★

Ha valamelyik feladat megoldására a szakkörön nem kerül sor, de valaki később – részben vagy teljesen – megoldotta azt, megírhatja nekem e-mail-ben; visszajelzést, esetleg további útmutatást küldök a levelére (távoktatás).

Gnädig Péter
gnadigpeter@gmail.com