

Olimpiai szakköri feladatok

2019. február 11.

Luneburg-lencse

Ha kíváncsiak vagyunk arra, hogy milyen egy, az \mathbf{r} helyvektortól függő $n(\mathbf{r})$ törésmutatójú közegben haladó fénysugár pályája, általánosan a *Fermat-elvet* hívjuk segítségül. Az elv szerint egy optikai közeg két, A és B pontja között a fénysugár olyan útvonalon halad, amelyet a legrövidebb idő alatt tesz meg. Másképpen fogalmazva, azt a pályát követi, melyre az

$$\int_A^B n(\mathbf{r}) ds$$

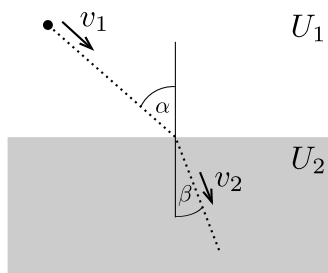
kifejezésnek szélsőértéke van (ds a pálya elemi ívhossza). Ezt az integrált optikai úthossznak nevezik. Ebből levezethető a Snellius–Descartes-törvény, miszerint a fénysugár egy n_1 és egy n_2 törésmutatójú közeg határához érve úgy törik meg, hogy teljesüljön az

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

egyenlet, ahol α a beesési szög az n_1 törésmutatójú közegben, β pedig a törési szög az n_2 törésmutatójú közegben.

Ha ismerjük az $n(\mathbf{r})$ függvényt, akkor elvben kiszámíthatjuk a fénysugár pályáját. Azonban ez az út sokszor felsőbb matematikai ismereteket igényel, viszont alkalmas mechanikai analógiával könnyebben célhoz érhetünk. Ebben a feladatban a helytől függő törésmutatójú közegekben terjedő fénysugarakkal foglalkozunk.

a) Tekintsünk egy pontszerű részecskét, ami az 1. ábrán látható, vízszintes, súrlódásmentes síkban halad. A részecske potenciális energiája és sebessége a felső félsíkban rendre U_1 , v_1 , az alsó félsíkban U_2 , v_2 . A részecske áthalad a két félsíkot elválasztó egyenesen az ábrán látható módon. Vezessünk le egy összefüggést v_1 , v_2 , α és β között!



1. ábra. Egy pontszerű részecske mozgása

b) Az előző feladat eredménye alapján adjuk meg a Fermat-elv mechanikában érvényes alakját!

A továbbiakban használjuk fel ezt a mechanikai analógiát, és tekintsünk egy olyan közeget, melynek törésmutatója csak az origótól mért r távolságtól függ, azaz $n(\mathbf{r}) = n(r)$.

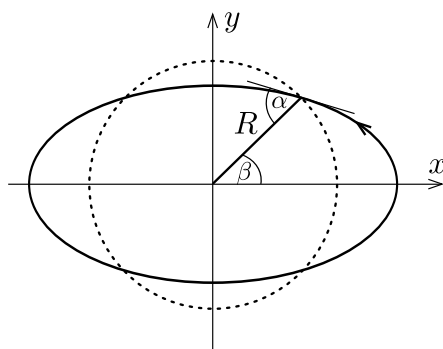
c) Egy bizonyos közegben bármely fénysugár pályája olyan ellipszis, melyek egyik *fókusza* az origó. A törésmutató értéke az origótól R távolságra $n(R) = n_0\sqrt{2}$, és $R/2$ távolságra pedig $n(R/2) = n_0\sqrt{3}$. Adjuk meg $n(r)$ alakját n_0 , R és r segítségével!

d) Egy másik közegben a fénysugarak pályái ismét ellipszisek, de most az ellipszisek *középpontja* az origó. A törésmutató értéke az origóban $n(0) = n_0\sqrt{2}$, illetve az origótól R távolságra $n(R) = n_0$. Adjuk meg $n(r)$ alakját n_0 , R és r segítségével!

e) Foglalkozzunk a **d)** feladatban leírt közeggel. A 2. ábrán látható fénysugár ellipszis pályája a következőképpen paraméterezhető:

$$\begin{aligned}x(\xi) &= a \cos \xi, \\y(\xi) &= b \sin \xi,\end{aligned}$$

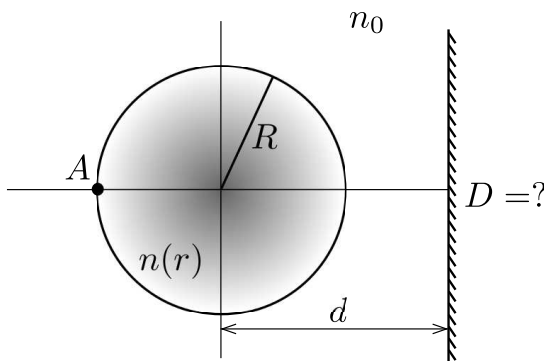
ahol $\xi \in [0, 2\pi]$, a és b pedig az ellipszis nagy és kis féltengelye. Mely ξ értékekre lesz a fénysugár R távolságra az origótól?



2. ábra. Az origó középpontú ellipszisen haladó fénysugár. A szaggatott kör az origótól mért R távolságot jelöli. Az α szög a sugár és az adott pontbeli érintő közötti szöget mutatja

f) A 2. ábrán látható α és β szögek közötti összefüggés: $\alpha = K\beta$. A mechanikai analógia segítségével határozzuk meg K értékét!

A **d)** feladatbeli közeget úgy változtatjuk meg, hogy $r > R$ értékekre $n(r) = n_0$ (és $r \leq R$ esetén a törésmutató változatlan). Ekkor egy úgynevezett *Luneburg-lencsét* kapunk. A lencsének a 3. ábrán jelölt A pontjába egy pontszerű, minden irányba egyenletesen sugárzó, P teljesítményű fényforrást, a lencse fényforrással átellenes oldalára, a lencse középpontjától $d > R$ távolságra pedig egy ernyőt helyezünk el.



3. ábra. A Luneburg-lencse az A pontjában levő fényforrással és ernyővel

g) Mekkora az ernyőn keletkező fényfolt D átmérője?

h) Adjuk meg az ernyőn mérhető intenzitást a folt közepétől mért távolság függvényében!