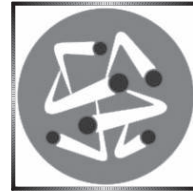


A 43. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia feladatainak megoldása*

Elméleti feladatok



1. feladat. Ragadd meg a lényegét!

A rész. Hajítás. i. Ha a golyót függőlegesen felfelé dobjuk, akkor – a mechanikai energia megmaradása alapján – eléri az $x = 0$, $z = \frac{v_0^2}{2g}$ pontot. Ezt összehasonlítva a $z \leq z_0 - kx^2$ egyenlőtlenséggel

$$z_0 = \frac{v_0^2}{2g}$$

adódik. A k állandó meghatározásához vizsgáljuk a $z \rightarrow -\infty$ határesetet! Ebben a határesetben a golyó akkor jut (adott z érték esetén) vízszintes irányban a legmesszebbre, ha a parabolapálya a leglaposabb, azaz ha a golyót vízszintesen hajítjuk el. Ekkor

$$z = -\frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

Ezt beírva a megadott, most $x \rightarrow \infty$ határesetben vizsgált egyenlőtlenségbe

$$-\frac{g}{2v_0^2}x^2 \leq z_0 - kx^2,$$

azaz

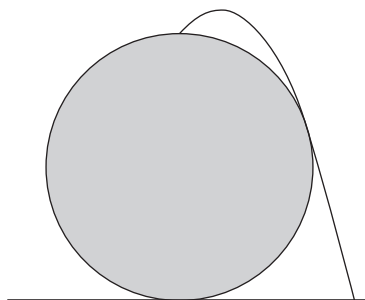
$$k - \frac{g}{2v_0^2} \leq \frac{z_0}{x^2} \rightarrow 0.$$

Innen $k \leq \frac{g}{2v_0^2}$. Ha $k < \frac{g}{2v_0^2}$ teljesülne, akkor (nagy x -re) a golyó által elérhető tartomány és a megadott egyenlőtlenség által meghatározott tartomány között egy „rés” lenne, ezt a lehetőséget tehát kizárhatjuk. Eszerint a kért paraméter:

$$k = \frac{g}{2v_0^2}.$$

*Az elméleti feladatok szövegét a múlt havi számunkban közöltük.

ii. A golyó pályája megfordítható, így az eredeti kérdés helyett vizsgálhatjuk ezt is: legalább mekkora sebességgel kell az épület tetejéről eldobni a golyót, hogy valahol földet érjen (anélkül, hogy az épületnek ütközne). Könnyen belátható, hogy a golyó pályája vagy az 1. ábrán látható, az épületet érintő parabola, vagy pedig egy olyan vízszintes hajítás, ahol a parabola görbülete a csúcspontjában megegyezik a gömb sugarával. (Ha a golyó sehol nem érinti a parabolát, akkor csökkenthető a sebessége, egész addig, amíg valahol érinteni fogja.)



1. ábra

Vizsgáljuk meg a vízszintes hajítást! Ha változatlan sebességgel, de a vízszinteshez képest kis szöggel felfelé dobnánk a golyót, akkor sehol sem érintené az épületet – így viszont kezdeti sebessége csökkenthető lenne! Ebből következik, hogy a vízszintes hajítás nem lehet ideális, így a helyes megoldás az 1. ábrán látható pálya.

iii. Vegyük észre, hogy az egész épületnek benne kell lenni abban a tartományban, amit az épület tetejéről induló, minimális sebességű hajításokkal el tudnánk találni. (Hiszen ha az optimálishoz képest csökkentjük az eldobás vízszintesével bezárt szögét, akkor a golyó nem érinti, hanem eltalálja az épületet.) Ugyanakkor a dobással elérhető tartomány határának érinteni kell az épületet. (Ellenkező esetben az optimális sebességgel lehetne úgy hajítani, hogy az nem érinti az épületet.)

Tehát a minimális sebességgel eldobott golyóval elérhető tartomány határa és az épület felszíne érinti egymást (a szimmetria miatt két pontban). Ha a minimális indítási sebesség a gömb tetejéről v_0 , akkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$x^2 + z^2 + 2zR = 0, \quad z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

z kiküszöbölésével x^2 -re a következő másodfokú egyenlet adódik:

$$\left(\frac{g}{2v_0^2}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2}\right) x^2 + \left(\frac{v_0^2}{4g} + R\right) \frac{v_0^2}{g} = 0.$$

A két görbe akkor érinti egymást, amikor az egyenlet diszkriminánsa éppen 0. Ebből

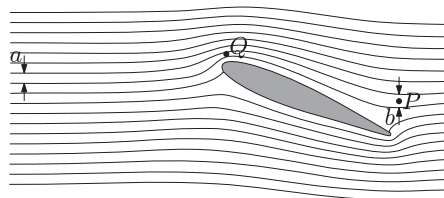
$$\left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{gR}{v_0^2}, \quad \text{azaz} \quad v_0^2 = \frac{gR}{2}.$$

A mechanikai energia megmaradása alapján a keresett minimális indítási sebesség

$$v_{\min} = \sqrt{v_0^2 + 4gR} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

B rész. Légáramlás a szárny körül. *i.* A szárnyhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben a kontinuitási törvény miatt két áramvonal között (egy áramlási

vonala mentén) állandó a levegő térfogatárama (az időegységenként átáramló levegő mennyisége). A térfogatáram a sebesség és a keresztmetszet szorzata. A keresztmetszet viszont esetünkben – a kétdimenziós geometria miatt – arányos az áramvonalak távolságával, ami a 2. ábráról leolvasható. Mivel nincsen szél, a nyugalomban lévő levegő sebessége a szárnyhoz viszonyítva éppen v_0 . Az ábrán megmérve $a = 10$ egység és $b = 13$ egység. Ez alapján a levegő sebessége a P pontban a szárnyhoz képest $u = v_0 \frac{a}{b}$, a földhöz képest pedig



2. ábra

$$v_P = v_0 - u = v_0 \left(1 - \frac{a}{b}\right) = 23 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

ii. Bár az $\frac{1}{2}\rho v^2$ dinamikus nyomás aránylag kicsi, változása bizonyos mértékű adiabatikus összenyomódást vagy kitégülést eredményez. Ott, ahol a levegő kitégül, a hőmérséklete lecsökken, és ha a hőmérséklet eléri a harmatpontot, akkor a vízgőz kicsapódik, apró vízcseppek jelennek meg. A kicsapódás ott kezdődik meg, ahol a kitégülés maximális, azaz ahol a levegő (statikus) nyomása minimális. A Bernoulli-törvény szerint $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{állandó}$, így p ott lesz a legkisebb, ahol v (a levegő szárnyhoz viszonyított sebessége) a legnagyobb, azaz ahol az áramvonalak a legközelebb vannak egymáshoz. Ez a 2. ábrán Q -val jelölt pont.

iii. Először meg kell határoznunk a harmatpontot. A vízgőz nyomása $p_w = p_{sa} r = 2,08 \text{ kPa}$. A kis változások miatt a gőznyomás hőmérséklet-függését tekinthetjük közelítőleg lineárisnak:

$$\frac{p_{sa} - p_w}{T_a - T} = \frac{p_{sa} - p_{sb}}{T_a - T_b},$$

amiből $T \approx 291,5 \text{ K}$ adódik.

Ezután meg kell határozni a levegő sebessége és hőmérséklete közti kapcsolatot. A Bernoulli-törvényhez hasonlóan egy energiamérleget írhatunk fel, de figyelembe kell vennünk a levegő összenyomásával/kitégülésével kapcsolatos munkát is. Mivel a levegő rossz hővezető, és az áramlás során gyorsak a változások, a folyamat adiabatikus. Egy áramlási cső (például két közeli áramvonal közötti térrész) két pontjára (1 és 2) felírva a munkatételt egy mol levegőre az

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 + c_V MT_1 + p_1 V_1 = \frac{1}{2}Mv_2^2 + c_V MT_2 + p_2 V_2$$

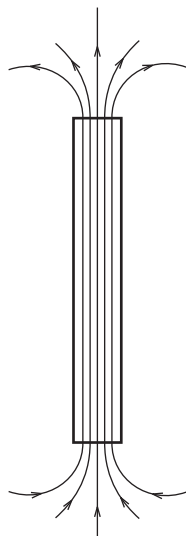
összefüggést kapjuk, ahol M a levegő moláris tömege, c_V pedig az állandó térfogaton mért fajhő. (Az első tag a gáz mozgási energiája, a második a belső energiája, a harmadik pedig a gáz benyomásakor végzett munka.) Felhasználva, hogy egy mol gázra $pV = RT$, és $c_V M + R = c_p M$, azt kapjuk, hogy $\frac{1}{2}v^2 + c_p T = \text{állandó}$. Ebből

$$c_p \Delta T = -\Delta \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}v_{\text{krit.}}^2 \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right),$$

ahol c az áramvonalak távolsága a Q pontban. Felhasználva, hogy $c \approx 4,5$ egység és $\Delta T = -1,5$ K,

$$v_{\text{krit.}} = c \sqrt{\frac{2c_p \Delta T}{c^2 - a^2}} \approx 23 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Megjegyzés: A valóságban ennél valamivel nagyobb sebesség szükséges, mert a levegő hirtelen kicsapódása csak jelentős túltelítés hatására indul meg.



3. ábra

C rész. Mágneses csövek. i. A cső szupravezető falán nem mehetnek át indukcióvonalak, így a csőben állandó a fluxus. A cső belsejében örvénymentes a tér, a két feltételből együtt pedig adódik, hogy homogén is, azaz az indukcióvonalak párhuzamosak, és egyenlő távolságra vannak egymástól.

Megjegyzés: A csővön kívül a tér *hasonlít* a vékony, hosszú tekercs (szolenoid) mágneses teréhez, azzal a *fontos különbséggel*, hogy a szolenoid végeinek közelében a tekercs oldalán is lépnek ki indukcióvonalak, a szupravezető csőnél ez nem lehetséges. A másik különbség: a szolenoid árama (egyenletes tekercselés esetén) hosszegységenként mindenhol ugyanakkora, a szupravezető cső falában folyó áram pedig a végek közelében nem egyenletes.

A szupravezető cső indukcióvonalait vázlatosan a 3. ábra mutatja.

ii. Nyújtsuk meg gondolatban egy kicsiny $\Delta \ell$ értékkel a csövet, és vizsgáljuk meg, hogy ehhez mennyi munkára van szükség! A cső fluxusa nem változhat (mert a fluxusváltozás a szupravezetőben végtelen nagy áramokat indukálna), így a mágneses indukció is állandó: $B = \frac{\Phi}{\pi r^2}$. A mágneses tér energiasűrűsége $\frac{1}{2\mu_0} B^2$, amiből a cső megnyújtásához szükséges munka

$$\Delta W = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \Delta V = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\Phi^2}{\pi^2 r^4} \pi r^2 \Delta \ell = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi r^2} \Delta \ell.$$

Ezt a munkát a húzóerő végzi: $\Delta W = T \Delta \ell$, amiből a keresett erő

$$T = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi r^2}.$$

iii. A csövek között fellépő erő iránya – az elrendezés szimmetriája miatt – nyilván merőleges a csövek tengelyére. Az erő nagyságát egy elektrosztatikus analógia alapján fogjuk meghatározni. Vizsgáljuk meg, hogyan változik a rendszer mágneses energiája, ha az egyik csövet egy kicsit elmozdítjuk, eltávolítjuk a másiktól! A csövek belsejében semmi se változik, mert a csövek fluxusa állandó, csak

a külső tér változik. A *csöveken kívül* a mágneses indukció örvénymentes (mert nincsenek áramok), a csövek végpontjai $\pm\Phi$ erősségű források, ezeken kívül viszont mindenhol forrásmentes a tér. Ezek a *csöveken kívül* pontosan olyan feltételek, mint amilyenek négy $\pm Q$ nagyságú elektromos töltés elektromos terét jellemzik. (A *csöveken belül* természetesen különböző a két tér, és a csövek falai is az elektromos esettől különböző határfelületet jelentenek, de *három dimenzióban* a vékony csövek elhanyagolható módon torzítják a *csöveken kívüli* teret.) Ezek szerint a csövek végpontjait úgy tekinthetjük, mintha mágneses ponttöltések lennének.

Keressük meg az elektromos és a mágneses jelenségek közötti megfeleltetést! Két Q nagyságú, egymástól a távolságra elhelyezett elektromos töltés között $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2}$ erő hat. Az egyik töltés terének energiasűrűsége a másik töltés helyén

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^4}.$$

Ezek szerint az erőt írhatjuk $F = 8\pi w a^2$ alakban is. Ez a kifejezés bármely esetben használható két ellentétes előjelű, azonos nagyságú ponttöltés között fellépő erő meghatározására, így használhatjuk a mágneses ponttöltésekre is.

A Gauss-törvény alapján egy Φ fluxusú mágneses ponttöltés által a távolságra létrehozott indukció $B = \frac{\Phi}{4\pi a^2}$. Az energiasűrűség a ponttöltéstől a távolságra

$$w = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{32\pi^2\mu_0} \frac{\Phi^2}{a^4},$$

amiből az a távolságra lévő Φ fluxusú mágneses ponttöltések között fellépő erő

$$F = 8\pi w a^2 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{a^2}.$$

A négy ponttöltés közül az ellentétesek vonzzák egymást, a köztük fellépő erő $F_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{\ell^2}$. Az átlósan elhelyezkedő azonos előjelű töltések közti taszítóerő normális komponense

$$F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{2\ell^2}.$$

Az eredő vonzó erő ezek alapján

$$F = 2(F_1 - F_2) = \frac{4 - \sqrt{2}}{8\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{\ell^2}.$$

2. feladat. Kelvin csepegtetős gépe

A rész. Egyetlen cső i. A feladat szövege szerint a víz *lassan* csöpög ki a csőből: ez időben állandósult vízhozamra utal, ezért a csőben lévő vízoszlopra ható erők eredője (a cső falánál és a folyadékban fellépő belső súrlódás miatt) zérus. A vízcseppben uralkodó nyomás a külső légnyomásnál a felületi feszültség miatt $\Delta p = 2\sigma/r$ értékkel nagyobb (itt r a vízcsepp sugara). A cső végén függő, lassan

hízó vízcseppre a következő négy erő hat: függőlegesen lefelé a $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ nehézségi erő, a cső szája és a víz érintkezési vonalán a felületi feszültségből származó $2\pi r\sigma$ nagyságú, felfelé mutató erő, a p_0 külső légnyomásból származó (felfelé irányuló) erő és a vízcsepp csőhöz csatlakozó részén egy kis d átmérőjű körlapon ható $p_0 + \Delta p$ nyomásból származó, lefelé mutató erő. Könnyen belátható, hogy utóbbi két erő eredője $\frac{\pi}{4}d^2\Delta p$, ezt a d -ben másodrendűen kicsiny hatást $d \ll r$ miatt elhanyagolhatjuk.

Közvetlenül a leválás előtt a vízcsepp jelentősen deformálódik: a csepp felső része és a cső között kicsiny, d átmérőjű, hengeres nyak képződik. Ebben a pillanatban a „nyak” által függőlegesen felfelé kifejtett $\pi d\sigma$ kapilláris erő éppen ellensúlyozza a vízcsepp súlyát, azaz

$$\pi d\sigma = \frac{4}{3}\pi r_{\max}^3 \rho g,$$

innen a csepp maximális sugara:

$$r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3\sigma d}{4\rho g}}.$$

ii. A vízcsepp töltéeloszlása ($d \ll r$ miatt) jó közelítéssel egyenletes, így a csepp φ potenciálja egy Q töltésű gömb potenciáljaként számolható:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r},$$

ebből $Q = 4\pi\varepsilon_0\varphi r$.

iii. A feltöltött gömbön kívül, annak felületének közelében $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ nagyságú térerősség uralkodik, a gömbön belül pedig zérus az elektromos térerősség. A gömb felületén lévő, ΔA felszínű kicsiny darabka töltése az egyenletes töltéeloszlás miatt $\Delta Q = \frac{\Delta A}{4\pi r^2} Q$, a rá ható erő pedig

$$\Delta F = \frac{1}{2} E \Delta Q = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} \Delta A = \frac{\varepsilon_0 \varphi^2}{2r^2} \Delta A.$$

(Az $\frac{1}{2}$ -es szorzótényező – kissé pongyolán fogalmazva – onnan származik, hogy a térerősség csak a darabka külső oldalán E , a belső oldalon zérus, így átlagosan $E/2$ a darabka helyén a térerősség. Ugyanez a faktor jelenik meg egy síkkondenzátor lemezei között ható erő kifejezésében is.)

A vízcseppet a felületi feszültség igyekszik összehúzni, a felületén lévő, egymást taszító töltések pedig igyekeznek kitágítani. Az elektromos taszításból származó erő $\frac{\Delta F}{\Delta A}$ értékkel csökkenti a csepp belsejében uralkodó nyomást. A csepp akkor szakad szét, ha ez a „negatív” nyomás éppen megegyezik a görbületi nyomással:

$$\frac{\varepsilon_0 \varphi_{\max}^2}{2r^2} = \frac{2\sigma}{r},$$

ebből a maximálisan alkalmazható potenciál $\varphi_{\max} = 2\sqrt{\sigma r/\varepsilon_0}$.

B rész. Két cső. i. Bár a cseppek potenciálja a földelés miatt nulla, a környező, hengeres elektródák hatása miatt mégis feltöltődnek. Vizsgáljuk meg a potenciál változását következő, a bal oldali csepptől a jobb oldali cseppig vezető útvonalon: a bal oldali csepptől a bal oldali hengeres elektródáig U a potenciálkülönbség, a bal oldali és a jobb oldali elektróda között q/C a feszültség (hiszen a kondenzátoron át kell haladnunk), végül a jobb oldali elektróda és a jobb oldali csepp között (a szimmetria miatt és a töltések előjele miatt) ismét U a feszültség. Útvonalunk kezdő- és végpontja egyaránt zérus potenciálú, tehát a feszültségek összegének is nullának kell lennie:

$$U + q/C + U = 0,$$

azaz az azonos oldalon elhelyezkedő hengeres elektróda és csepp között $U = \pm q/(2C)$ a feszültség (az előjel attól függ, hogy a jobb vagy bal oldalt vizsgáljuk). Az *A/ii.* rész eredményét felhasználva, a $\varphi = q/(2C)$ és $r = r_{\max}$ helyettesítéssel megkapjuk az éppen leeső cseppek töltését:

$$Q = 2\pi\varepsilon_0qr_{\max}/C.$$

ii. Az egységnyi idő alatt lecseppenő cseppek száma n , így a hengeres elektródák (vagyis a kondenzátor) töltése dt idő alatt $dq = Qndt$ értékkel növekszik. Az előző alkérdés eredményét felhasználva ez tovább alakítható:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{2\pi\varepsilon_0r_{\max}n}{C}q,$$

ami egy előjeltől eltekintve a radioaktív bomlás differenciálegyenletére hasonlít. A jobb oldalon eltérő előjel azt eredményezi, hogy a kondenzátor töltése a radioaktív atommagok számával ellentétben nem exponenciálisan csökken, hanem exponenciálisan növekszik az idővel:

$$q(t) = q_0e^{\gamma t}, \quad \text{ahol} \quad \gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0r_{\max}n}{C} = \frac{\pi\varepsilon_0n}{C} \sqrt[3]{\frac{6\sigma d}{\rho g}}.$$

iii. A leeső cseppek akkor érhetik el az alattuk elhelyezkedő edényeket, ha az mgH gravitációs helyzeti energiájuk elég nagy az elektrosztatikus taszítás legyőzéséhez. Közvetlenül a leszakadás után a Q töltésű csepp a hengeres elektróda által létrehozott $q/(2C)$ potenciált érzi, amikor pedig az alatta lévő, vízzel telt edénybe érkezik, $-q/(2C)$ potenciálú helyre kerül. Az edény elérésének feltétele tehát:

$$\frac{q}{C}Q \leq mgH, \quad \text{ahol} \quad Q = \frac{2\pi\varepsilon_0qr_{\max}}{C}.$$

Ebből a kondenzátor $U_C = q/C$ feszültségének legnagyobb értéke:

$$U_C^{\max} = \sqrt{\frac{mgH}{2\pi\varepsilon_0r_{\max}}}.$$

Az **A/i.** rész eredményét felhasználva a végeredmény:

$$U_C^{\max} = \sqrt[6]{\frac{\sigma^2 d^2 H^3 \rho g}{6\varepsilon_0}}.$$

3. feladat. Csillagkezdemény kialakulása

i. A kezdeti szakaszban a hőmérséklet nem változik. Így a Boyle–Mariotte-törvény alapján:

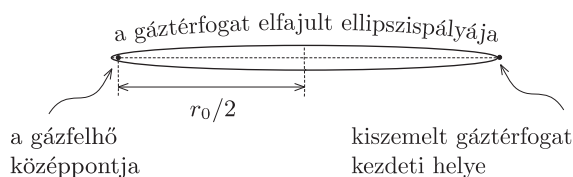
$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{V_0}{V_1} = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^3 = 8.$$

ii. A folyamat kezdetén a gáz nyomásából származó erők elhanyagolhatók a gravitációs erőhöz képest. Tekintsünk egy kicsiny gáztérfogatot a gázfelhő szélén. Ismert, hogy egy gömbszimmetrikus tömegeloszlás gravitációs tere a gömbön kívül (és annak felületén) megegyezik a gömb középpontjába helyeztet (azonos tömegű) tömegpont gravitációs terével. Így a gáztérfogatunk kezdeti gyorsulása $g \approx Gm/r_0^2$. Mivel a gravitációs erő nem változik lényegesen, a gyorsulást közelíthetjük ezzel az állandó értékkel. Ebben a közelítésben egyenletesen gyorsuló mozgásról beszélhetünk. A négyzetes úttörvényből az idő könnyen kifejezhető:

$$t_2 \approx \sqrt{\frac{2(r_0 - r_2)}{g}} = \sqrt{\frac{2r_0^2(r_0 - r_2)}{Gm}} = \sqrt{\frac{0,1 r_0^3}{Gm}}.$$

Megjegyzés. Érdeemes észrevenni, hogy ez az idő csak a gázfelhő sűrűségétől függ. Ez azt jelenti, hogy a gázfelhő belsejében kiszemelt kicsiny gáztérfogatra is igaz, hogy t_2 idő alatt csökken a középponttól mért távolsága 5%-kal. Hasonló okoskodással belátható, hogy ez a későbbi (nem nulla kezdősebességű) mozgásszakaszokra is érvényes, és emiatt a kezdetben homogén anyageloszlású gázfelhő mindaddig homogén marad, amíg a gáz nyomása elhanyagolható.

iii. Továbbra is feltételezzük, hogy a kicsiny gáztérfogatunk mozgásában a gravitáció kívüli hatásokat elhanyagolhatjuk. A feladat szövege azt sugallja, hogy az esési pályát egy elfajult ellipszispályának tekintsük, melynek fél nagytengelye $r_0/2$ (lásd a 4. ábrát).



4. ábra

Kepler III. törvényéből következik, hogy a pálya periódusideje megegyezik egy $r_0/2$ sugarú körpálya T periódusidejével, amit az egyenletes körmozgás mozgásegyenletéből könnyen ki lehet számítani:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{r_0}{2} = \frac{Gm}{(r_0/2)^2}, \quad \text{ahonnan} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{8Gm}}.$$

A feladat szövegéből kitűnik, hogy a végső sugár sokkal kisebb, mint a kezdeti, ezért az összeomlás idejét közelíthetjük a kiszámolt periódusidő felével:

$$t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{r_0^3}{8Gm}}.$$

Megjegyzés. A gázfelhő gravitációs összeroskadásának idejét úgy is megkaphatjuk, hogy az energiamegmaradás törvényét használva kiszámítjuk a sebesség helyfüggését:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{Gm}{r} = E \quad \left(= -\frac{Gm}{r_0} \right),$$

ahonnan

$$-\frac{dr}{dt} = v(r) = \sqrt{2E + \frac{2Gm}{r}},$$

majd a sebesség reciprokát integráljuk a teljes pályára:

$$t = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{2E + \frac{2Gm}{r}}}.$$

Az integrál (melynek kiszámítása a verseny korlátozott ideje alatt nyilván nem várható el) ugyanazt az eredményt adja, mint a Kepler-törvényekre hivatkozó megoldás.

iv. Mivel a gáz hőmérséklete nem változik, azért a gáz által kisugárzott hő a gázon végzett munkával egyenlő. A gáz izoterm állapotváltozása során a végzett munka:

$$W = - \int_{V_0}^{V_3} p(V) dV,$$

ahol a nyomás a $pV = \frac{m}{\mu} RT_0$ gáztörvényből számolható. A kisugárzott hő eszerint

$$Q = W = -nRT_0 \int_{V_0}^{V_3} \frac{1}{V} dV = RT_0 \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_0}{V_3} = 3RT_0 \frac{m}{\mu} \ln \frac{r_0}{r_3}.$$

Megjegyzések. 1. A felhasznált munkaképlet arra az esetre vonatkozik, amikor a gáz egyensúlyi állapotokon keresztül jut el egyik állapotból a másikba. Ez a jelen esetben *nem teljesül*, de ennél jobb becslést nem lehet adni.

2. Sokan ott hibáztak, hogy a gravitációs energia teljes változásával tették egyenlővé a kisugárzott hőt. Ez csak akkor lenne igaz, ha a nyomás a gravitációval azonos nagyságú lenne, itt viszont elhanyagolható. A feladat szövegében megadott $Gm\mu/r_0 \gg RT_0$ egyenlőtlenséggel könnyű belátni, hogy a kisugárzott hő elhanyagolható a gravitációs energiaváltozáshoz képest.

v. Az összeroskadás ebben a szakaszban adiabatikus. Az adiabatikus állapotváltozásra igaz, hogy $pV^\gamma =$ állandó. Ebből és a gáztörvényből következik, hogy $TV^{\gamma-1} =$ állandó. Ezt felhasználva:

$$T = T_0 \left(\frac{V_3}{V} \right)^{\gamma-1} = T_0 \left(\frac{r_3}{r} \right)^{3\gamma-3}.$$

vi. Az összeroskadás $r_3 \rightarrow r_4$ szakaszában a gravitációs energia és a meglévő mozgási energia alakul át a gáz belső energiájává. A mozgási energia megegyezik az $r_0 \rightarrow r_3$ szakaszon történő gravitációs energiaváltozás nagyságával. A gravitációs energiaváltozást a következő formulával becsülhetjük:

$$\Delta E_g = -G \frac{m^2}{r_4} - \left(-G \frac{m^2}{r_0} \right) \approx -G \frac{m^2}{r_4}.$$

(A pontosabb, integrálással meghatározható energiaváltozás ettől a becsléstől egy $\frac{3}{5}$ -ös szorzótényezőben különbözik.) A belső energia megváltozása:

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} nRT_4 - \frac{f}{2} nRT_0 \approx \frac{f}{2} nRT_4 \approx RT_4.$$

A fenti közelítéseknél kihasználtuk, hogy $r_4 \ll r_0$ és $T_4 \gg T_0$; az $f/2$ tényező helyébe pedig azért írtunk 1-et, mert csupán nagyságrendi becslésre törekszünk; az egységnyi nagyságú szorzótényezőket nem vesszük számításba.)

A két energiaváltozás nagyságát egyenlővé téve – és a hőmérsékletet a felhő sugarával kifejezve – kapjuk:

$$G \frac{m^2}{r_4} \approx \frac{m}{\mu} RT_0 \left(\frac{r_3}{r_4} \right)^{3\gamma-3}.$$

Innen a keresett méret és hőmérséklet kifejezhető:

$$r_4 \approx r_3 \left(\frac{RT_0 r_3}{\mu m G} \right)^{\frac{1}{3\gamma-4}}, \quad T_4 \approx T_0 \left(\frac{RT_0 r_3}{\mu m G} \right)^{\frac{3\gamma-3}{4-3\gamma}}.$$

Megjegyzések. 1. Az egyensúlyba került gázfelhő közepén kialakuló nyomást (közeleltően, de nagyságrendileg helyesen) kétféleképpen is kiszámíthatjuk: egyrészt a (ρ sűrűségű) gáz hidrosztatikai nyomásaként:

$$p \approx \rho r_4 \cdot \frac{Gm}{r_4^2},$$

másrészt a gáztörvény felhasználásával:

$$p \approx \frac{\rho}{\mu} RT_4.$$

A két kifejezés jobb oldalát egyenlővé téve (valamint T_4 és r_4 korábban kiszámított kapcsolatát is felhasználva) megkapjuk T_4 és r_4 fentebb levezetett kifejezéseit.

2. Sok versenyző (a magyar diákok közül is többen) a *virtuális munka elvét* használták. Eszerint egy test akkor van egyensúlyi helyzetben, ha egy kicsiny elképzelt (virtuális) kitérés esetén a testen végzett munkák összege nulla. A jelen esetre alkalmazva ez azt jelenti, hogy kicsi sugárváltozás esetén a felszabaduló gravitációs energia éppen fedezi a gáz belső energia növekedését. Az így számolt képletek egy konstans szorzótényezőben térnek el a fenti eredményektől.

Az eltérés okát egy egyszerű mechanikai példával szemléltethetjük. Ha egy nyújtatlan rugóra egy testet akasztunk, és felírjuk az energia-megmaradás törvényét, akkor a rezgőmozgás alsó és felső maximális kitérés helyét kapjuk meg, a virtuális munka elvével pedig az egyensúlyi helyzetet találjuk meg.