



Előolimpiai verseny- Fizika
Románia- Magyarország-
Moldova
XVI alkalom, Zilah



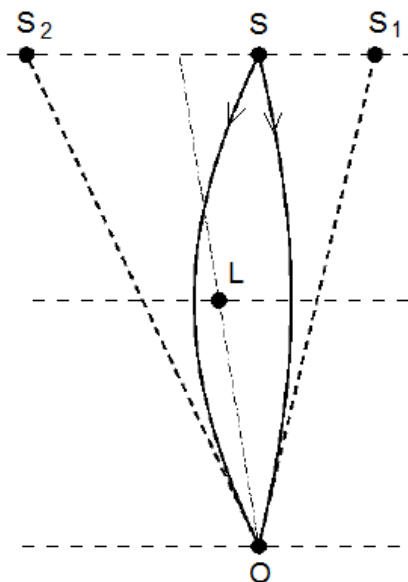
III. Feladat (10 pont)

A rész– Gravitációs lencsék

Az első tanulmány a fény gravitációs térben történő elhajlásáról 1804-ben jelent meg (Johann Soldner¹). Egy évszázaddal később, 1916-ban Albert Einstein jósolta meg általános relativitáselméletében a fény elhajlását a gravitáció hatására. Ezt kísérletileg először az 1919-es teljes napfogyatkozás során igazolta Sir Arthur Stanley Eddington és csapata.

A jelenség, aminek során egy nagy tömegű kozmikus test (csillag, galaxis, galaxishalmaz, fekete lyuk stb.) meghajlítja az elektromágneses sugárzást (a teljes spektrumban), leírható egy olyan modellel, amely hasonlít a fénysugarak optikai lencsében bekövetkező eltérülésére. Innen ered a gravitációs lencse elnevezés. Az elektromágneses sugárzás forrása és egy megfigyelő között elhelyezkedő olyan nagy tömegű objektumot, amely az elektromágneses sugárzás terjedési irányának elhajlását okozza, gravitációs lencsének nevezünk.

A gravitációs lencsék a sugárzás forrásának többszörös képét hozhatják létre. Például, az S forrás által kibocsátott elektromágneses sugárzást a gravitációs lencseként (L) viselkedő nagy tömegű égitest eltéríti, majd az O megfigyelő az S forrást az S_1 és S_2 képekként érzékeli (1. ábra).



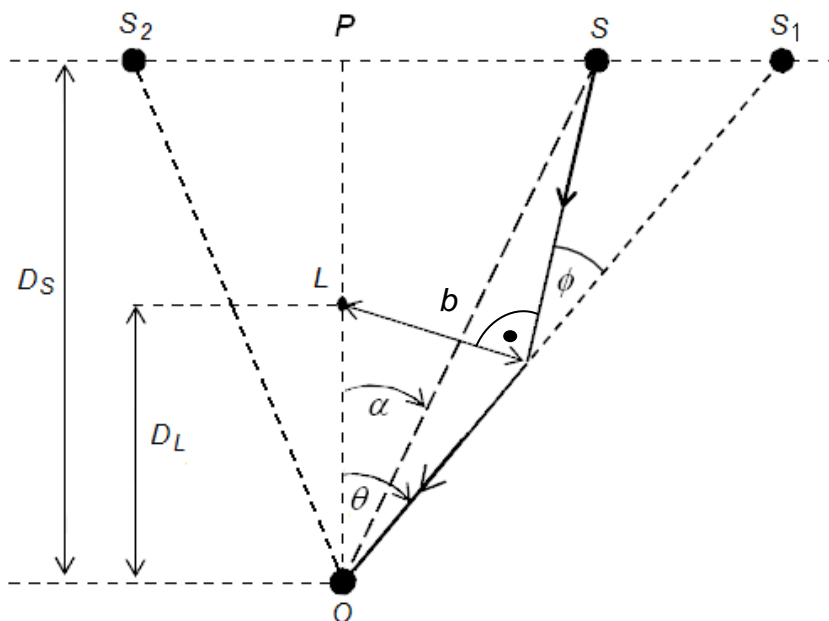
A következőkben egy egyszerű modellt kell használnod, amelyben tételezd fel, hogy az L gravitációs lencse egy gömbszimmetrikus, M tömegű objektum. Tételezd fel, hogy a lencse méretei kicsik a tipikus lencse-forrás, illetve lencse-megfigyelő távolságokhoz képest (2. ábra). A pontszerűnek tekinthető S forrás által kibocsátott elektromágneses sugárzást a gravitációs lencse eltéríti, majd az O megfigyelő a forrás két képét látja (S_1 és S_2). A 2. ábra nem léptékhelyes.

Vedd figyelembe, hogy egy gömbszimmetrikus gravitációs lencse esetén az elektromágneses sugárzás ϕ eltérülési szöge

$$\phi = \frac{4GM}{c^2 b}, \quad (1)$$

ahol G a gravitációs állandó, c a fény vákuumbeli terjedési sebessége, b a beesési (vagy másnéven impakt) paraméter (az a távolság, amennyire a megfigyelőhöz érkező fénysugár haladna el a gravitációs lencse tömegközéppontja mellett, ha nem szenvedne eltérülést). A továbbiakban tételezd fel, hogy a ϕ , α és θ szögek nagyon kicsik.

¹ Soldner, J.G.v.(1801/4) "On the deflection of light ray from its rectilinear motion, by the attraction of a celestial body at which it nearly passes by", Berliner Astronomisches Jahrbuch:161-172.



2. ábra

1. részfeladat – Einstein-gyűrű

Az 1. részfeladat során tekintsük azt a speciális esetet, amikor $\alpha = 0$, azaz a forrás, a gravitációs lencse, valamint a megfigyelő egy vonalban vannak. Az ilyen körülmények között keletkezett kép az Einstein-gyűrű.

1a. A 2. ábra jelöléseit használva igazold, hogy ebben a speciális esetben a θ szög kifejezése

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_S - D_L}{D_S D_L}},$$

ahol θ_E az a látószög, amely alatt az Einstein-gyűrű sugara látszik.

Tételezd fel, hogy a Föld szomszédságában található megfigyelő és a forrásként tekintett S csillag közötti távolság $5 \cdot 10^4 \text{ pc}$, és hogy a csillagtól $1 \cdot 10^4 \text{ pc}$ távolságra található gravitációs lencse egy olyan égitest, melynek tömege megegyezik a Nap tömegével és sugara sokkal kisebb mint $1 \cdot 10^4 \text{ pc}$. A gravitációs állandó $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, a fény sebessége vákuumban $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Ismeretes, hogy $1 \text{ pc} = 3,09 \cdot 10^{16} \text{ m}$, valamint hogy a Nap tömege $M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

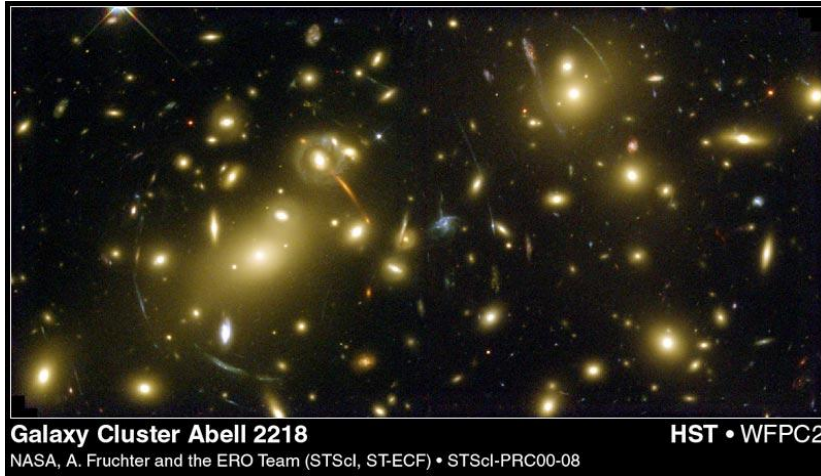
1b. Becsüld meg az Einstein-gyűrű sugarának θ'_E látószögét.

Legyen egy $M = 10^{15} \cdot M_S$ tömegű galaxishalmaz, az S forrástól 1 Gpc, a megfigyelőtől 2 Gpc távolságra, amely gravitációs lencseként viselkedik. Vedd úgy, hogy a galaxishalmaz „sugara” sokkal kisebb mint 1 Gpc.

1c. Becsüld meg ebben az esetben is a θ''_E látószöget.

2. részfeladat – A Hubble űrtávcső

Működésének 24 éve alatt a Hubble űrtávcső számos olyan látványos felvételt készített, melyeken jól látható a gravitációs lencse hatás. Egy ilyen felvétel látható a 3. ábrán.



3. ábra

A Hubble távcső az infravörös, a látható, valamint az ibolyántúli színek tartományából is tud adatokat rögzíteni.

A 2. részfeladatban az űrtávcső működését kell elemezned a látható színek tartományban. Ennek megfelelően becsüld meg, hogy az 1b, illetve 1c alpontokban meghatározott Einstein-gyűrűk megfigyelhetők-e a látható színek tartományban működtetett Hubble űrtávcsővel.

- 2a.** Becsüld meg a Hubble űrtávcső felbontóképességét, ha a főtükör átmérője 2,40 m .
- 2b.** Megfigyelhetők-e az 1b és 1c pontokban meghatározott θ'_E és θ''_E látószögű Einstein-gyűrűk a látható színek tartományban működtetett Hubble távcső segítségével? Indokold válaszod!

3. részfeladat– Képek gravitációs lencsékben

Ebben a részfeladatban a 2. ábrán található vázlat alapján kell meghatároznod az S_1 és S_2 képek néhány geometriai jellemzőjét.

- 3a.** Add meg az S_1 és S_2 képek helyzetét meghatározó θ_1 és θ_2 szögek kifejezését! Az eredményt α és θ_E függvényében fejezd ki.
- 3b.** Határozd meg a $\frac{\theta_1}{\alpha}$ és $\frac{\theta_2}{\alpha}$ arányok kifejezését. Add meg az eredményeket a $\xi = \frac{\alpha}{\theta_E}$ arány függvényében.
- 3c.** Határozd meg a $\frac{\Delta\theta}{\Delta\alpha}$ nagyítás kifejezését abban az esetben ha $\Delta\alpha \ll \alpha$ és $\Delta\theta \ll \theta$. Az eredményeket α és θ függvényében fejezd ki.
- 3d.** A 3c pont eredményeit felhasználva vezesd le a $\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta\alpha}\right)_{\theta=\theta_1}$ és a $\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta\alpha}\right)_{\theta=\theta_2}$ nagyítások kifejezéseit a ξ arány függvényében.

B rész– Egy neutroncsillag sugara

1935-ben Carl Friedrich von Weizsäcker német fizikus levezetett egy félempirikus formulát a Z protonból és A nukleonból álló atommag (pozitívként értelmezett) kötési energiájának kifejezésére az úgynevezett cseppmodell alapján:

$$W_{\text{kotesi}}(A, Z) = a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} - a_A \frac{(A-2Z)^2}{A} + \lambda \frac{a_P}{A^{\frac{3}{4}}}$$

Az utána következő években az a_V, a_S, a_C, a_A, a_P együtthatók értékein finomítottak, de Weizsäcker képlete változatlan maradt.

- A képlet jobboldali első tagja, $(a_V A)$, a kötési energia legjelentősebb (térfogati) eleme és azoknak a magerőknek a következménye, amelyek az adott nukleon és szomszédai között hatnak.
- A gömbszerűnek tekintett atommag felületén található nukleonok kevesebb szomszédos nukleonnal lépnek kölcsönhatásba, emiatt kötési energiájuk kisebb. A Weizsäcker-féle képletben a felületen elhelyezkedő nukleonoknak megfelelő tag a $\left(-a_S A^{\frac{2}{3}}\right)$.
- A protonok közt fellépő kölcsönös taszítás hatására a mag kötési energiája csökken. A Weizsäcker-féle képletben ezt a $\left(-a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}}\right)$ tag fejezi ki.
- A következő két tag a nukleonok kvantum-jellegéhez kapcsolódik. A $\left(-a_A \frac{(A-2Z)^2}{A}\right)$ tag a Pauli-féle kizárási elvhez társítható energiának felel meg (aszimmetria-tag).
- Az utolsó tag, $\left(\lambda \frac{a_P}{A^{\frac{3}{4}}}\right)$, egy olyan korrekciós tag, amelyik figyelembe veszi a páros-páros, páratlan-páratlan, illetve a páros-páratlan típusú atommagokat. Ennek megfelelően:
 $\lambda = 1$ a páros-páros atommagok esetén, amelyekben Z és $(A-Z)$ páros számok;
 $\lambda = -1$ a páratlan-páratlan atommagok esetén, amelyekben Z és $(A-Z)$ páratlan számok;
 $\lambda = 0$ minden más esetben.

A feladat az, hogy modellezz úgy egy neutroncsillagot, mintha az egy hatalmas A_0X atommag lenne és ennek a modellnek megfelelően becsüld meg egy neutroncsillag sugarát.

1. részfeladat

1.a. A félempirikus Weizsäcker-féle képletet egy neutroncsillagra alkalmazva vezess le egy kifejezést, amellyel megbecsülheted egy neutroncsillag sugarát.

1.b. Becslésed alapján számítsd ki numerikusan is egy neutroncsillag sugarát.

Használhatod az alábbi mennyiségek számértékeit:

$$a_V = 15,8 \text{ MeV}$$

$$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$a_S = 18,3 \text{ MeV}$$

$$m_n = 1,674 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$a_C = 0,714 \text{ MeV}$$

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$a_A = 23,2 \text{ MeV}$$

$$R_0 = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m},$$

$$a_P = 12 \text{ MeV}$$

ahol R_0 az atommag sugarát megadó képletben szereplő állandó: $R_{\text{mag}} = R_0 A^{1/3}$, itt A a tömegszám.

© Javasolták:

Dr. Delia DAVIDESCU – Bukaresti Egyetem- Fizika Kar
Dr. Adrian DAFINEI – Bukaresti Egyetem- Fizika Kar



Concursul Preolimpic de Fizică
România - Ungaria - Moldova
Ediția a XVI-a, Zalău
Proba teoretică, 2 iunie 2013



Válaszlap

III. Feladat (10 pont)

A rész– Gravitációs lencsék

1. részfeladat–Einstein-gyűrű

1a. Az Einstein-gyűrű kifejezésének levezetése

1,00p

1b. Az Einstein gyűrű sugarának becslése,
 θ'_E -re

0,50p

1c. Az Einstein gyűrű sugarának becslése,
 θ''_E -re

0,50p

2. részfeladat – A Hubble űrtávcső

2a. A látható színek tartományában működő Hubble-távcső felbontóképességének becslése

1,00p

2b.

Jelöld be a jó választ tartalmazó téglalapot:

Megfigyelhető-e a Hubble távcsővel a θ'_E sugarú Einstein gyűrű

Igen

Nem

Megfigyelhető-e a Hubble távcsővel a θ''_E sugarú Einstein gyűrű

Igen

Nem

Indokold válaszaidat!

1,00p

Jelöld be a jó választ tartalmazó téglalapot:

Megfigyelhető-e a Hubble távcsővel a θ'_E sugarú Einstein gyűrű

Megfigyelhető-e a Hubble távcsővel a θ''_E sugarú Einstein gyűrű

Indokold válaszaidat!

3. részfeladat – Képek gravitációs lencsékben

3a. A θ_1 és θ_2 szögek kifejezései

0,50p

3b. A $\frac{\theta_1}{\alpha}$ és $\frac{\theta_2}{\alpha}$ arányok kifejezései

0,50p

3c. A $\frac{\Delta\theta}{\Delta\alpha}$ nagyítás kifejezése, abban az esetben, ha $\Delta\alpha \ll \alpha$ és $\Delta\theta \ll \theta$

1,00p

3d. A $\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta\alpha}\right)_{\theta=\theta_1}$ és a $\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta\alpha}\right)_{\theta=\theta_2}$ nagyítások kifejezései a ξ arány függvényében

1,00p

B – Egy neutroncsillag sugara

1. részfeladat

1.a. A neutroncsillag becsült sugarának kifejezése

2,50p

1.b. A neutroncsillag minimális sugara

0,50p