

## FONTOS TUDNIVALÓK

- Az elméleti forduló időtartama 5 óra. A feladatok hibátlan megoldásával összesen 30 pontot lehet szerezni, a részpontszámok az egyes kérdések után zárójelben fel vannak tüntetve. Figyelem! Az összes feladathoz egyetlen, közös adattáblázat tartozik, ami a feladatokban szereplő konstansokat, fizikai állandókat tartalmazza (lásd a lap alját).
- A részletes számolásokat a rendelkezésre álló fehér lapokon végezd! Lehetőleg minél kevesebb szöveget használj, megoldásaidat igyekezz főleg egyenletekkel, számokkal, szimbólumokkal és grafikonokkal kifejezni! Ha azt szeretnéd, hogy megoldásod egy része ne kerüljön értékelésre, tedd zárójelbe azt a részt, és egy vonallal húzd át! (Az áthúzott, de helyes megoldást nem tudjuk értékelni.)
- Minden lapra írd rá a nevedet! Ügyelj rá, hogy *minden feladat megoldása külön lapra kerüljön*, mert a különböző feladatokat más-más javító fogja értékelni.
- Végeredményeidet a feladatokhoz tartozó válaszlap megfelelő mezőjébe is írd be! Mindenképp szakíts időt a válaszlap kitöltésére! Azokhoz a feladatokhoz tartozó mezőket, amelyekkel érdeemben nem foglalkoztál, hagyd üresen!
- A verseny teljesen egyéni. A feladatok megoldásához író- és rajzeszközökön, valamint kétsoros (nem grafikus) számológépen kívül semmilyen segédeszköz (könyv, füzet, internet, számítógép, mobiltelefon stb.) nem használható.

## FIZIKAI ÁLLANDÓK TÁBLÁZATA

vákuumbeli fénysebesség:  $c = 2,998 \cdot 10^8$  m/s

a vákuum permittivitása:  $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  C/(Vm)

a vákuum permeabilitása:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Vs/(Am)

gravitációs állandó:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup>/(kg s<sup>2</sup>)

elemi töltés:  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  C

Planck-állandó:  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Js

elektron tömege:  $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$  kg

neutron tömege:  $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$  kg

a Nap tömege:  $M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30}$  kg

# XVII. ROMÁN-MAGYAR ELŐOLIMPIA

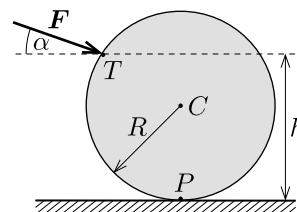
Pécs, 2014. június 1.



**1. feladat.** (Ez a feladat két független, kisebb részből áll.)

**1.A. A tökéletes lökés.** A biliárdasztalon egy  $R$  sugarú biliárdgolyó nyugszik. A golyó középpontját jelöljük  $C$ -vel, az asztallal érintkező pontját pedig  $P$ -vel.

**1.A.1.** Szeretnénk a golyót úgy meglökni, hogy a pillanatszerű indítást követő köszörülő mozgás befejeződésekor éppen megálljon. Ehhez az asztal síkjától számított  $h$  magasságban rövid erőlökést adunk a golyónak úgy, hogy a kifejtett  $F$  erő hatásvonala benne legyen az erő  $T$  támadáspontja, valamint a  $C$  és  $P$  pontok által meghatározott síkban. Mekkora legyen az ábrán látható  $\alpha$  szög ahhoz, hogy tervünk sikerüljön? (1,5 p)



**1.A.2.** Ha az erőlökések hatásvonala nincs benne a  $T$ ,  $P$ ,  $C$  pontok által meghatározott síkban, akkor elérhető, hogy a lökés után a biliárdgolyó szögsebességének mindhárom (függőleges és két vízszintes) komponense nullától különböző érték legyen (a biliárdjátékosok ezt *Coriolis-massé* lökésnek hívják). Ebben az esetben milyen alakú pályán mozog a golyó a köszörülés befejeztéig? (Tételezzük fel, hogy a golyó mindvégig egyetlen ponton érintkezik az asztallal.)

*Útmutatás:* Vizsgáljuk a golyó talajjal érintkező  $P$  pontjának sebességét! (3,5 p)

**1.B. Szonolumineszcencia.** Ha egy álló folyadékban kellően erős hanghullámot hozunk létre, a folyadékban apró buborékok (üregek) keletkeznek. Ezekben a parányi buborékokban igen alacsony nyomású gőz és egyéb gázok találhatók nemegyensúlyi állapotban. Ezért a buborékok a környező folyadék nyomása következtében nagyon rövid idő alatt igen kis méretűre roppannak össze, végül fényt bocsátanak ki. Ez a szonolumineszcencia jelensége.

Egy laboratóriumi kísérlet során vízben egybuborékos szonolumineszcenciát hozunk létre. A buborék kezdeti sugara  $R_0 = 40 \mu\text{m}$ , a buborék falának kezdeti sebessége zérus. A környező víz  $p = 10^5 \text{ Pa}$  nyomása hatására a buborék  $R = 0,5 \mu\text{m}$  sugarúra omlik össze, majd folytonos spektrumú elektromágneses sugárzást bocsát ki nagyon kis energiáktól egy bizonyos  $E_{\text{max}}$  maximális értékig terjedő energiatarományban. Azoknak a kisugárzott fotonoknak a  $\Delta N$  számát, melyek energiája az  $(E, E + \Delta E)$  energiatarományba esik, a

$$\Delta N = \alpha \frac{\Delta E}{E}$$

összefüggés adja meg, ahol az  $\alpha$  tényező értéke ennél a buboréknál a kísérlet tanúsága szerint  $3,3 \cdot 10^6$ .

**1.B.1.** Az összeroppanás során a buborékot körülvevő víz mozgásba jön. Feltételezve, hogy a víz összes mozgási energiája a fenti energiaeloszlású elektromágneses sugárzássá alakul, mekkora lehet a sugárzás legnagyobb frekvenciájú fotonjainak energiája? (2,5 p)

**1.B.2.** Mekkora a buborék sugara abban a pillanatban, amikor falának sebessége eléri a hangsebességet? A víz sűrűsége  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ , a vízbeli hangsebesség  $c = 1500 \text{ m/s}$ . (2,5 p)

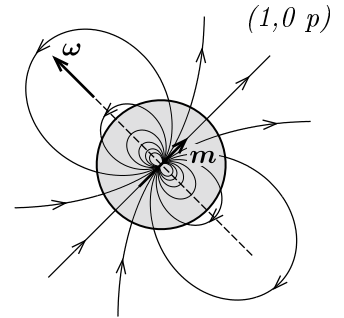
## 2. feladat. Pulzárak, magnetárok

A pulzárak erős mágneses térrel rendelkező, gyorsan forgó neutroncsillagok. A forgás miatt időben változó mágneses tér alakul ki körülöttük, melynek következtében elektromágneses sugárzást bocsátanak ki, így tengely körüli forgásuk folyamatosan lassul. Ebben a feladatban a pulzárak forgásának dinamikájával, és mágneses terük szerkezetével foglalkozunk.

**2.1.** A neutroncsillagok átlagsűrűsége nagyságrendileg akkora, mint a nehéz atommagoké. Ismert, hogy egy  $A$  tömegszámú nehéz atommag  $r$  sugarát az  $r = r_0 A^{1/3}$  összefüggés adja meg, ahol  $r_0 = 1,2 \cdot 10^{-15}$  m, állandó érték. A fenti kifejezés segítségével adjunk nagyságrendi becslést a neutroncsillagok  $\rho$  sűrűségére,  $\text{kg}/\text{m}^3$  egységekben. (A valóságban a neutroncsillagok sűrűsége ennek az értéknek 2-3-szorosa.) (0,5 p)

**2.2.** Egy gyorsan forgó neutroncsillag szögsebessége nem lehet tetszőlegesen nagy érték, ellenkező esetben a forgás a csillag szétszakadását eredményezné. Adjunk nagyságrendi becslést egy  $\rho$  sűrűségű neutroncsillag lehetséges maximális  $\omega_{\max}$  szögsebességére! Határozzuk meg  $\omega_{\max}$  számszerű értékét is a **2.1.** pontban kapott eredményt felhasználva. (1,0 p)

A pulzárak lassulási ütemének vizsgálatához tekintsük a következő, egyszerű modellt. Legyen a pulzár egy  $M$  tömegű,  $R$  sugarú,  $\omega$  szögsebességgel forgó, egyenletes tömegeloszlású gömb, melynek középpontjában a gömbbel együttforgó, állandó nagyságú,  $\mathbf{m}$  dipólmomentékű mágneses dipólus helyezkedik el úgy, hogy  $\mathbf{m}$  és  $\omega$  merőlegesek egymásra.



**2.3.** Elméleti megfontolások szerint egy forgó mágneses dipólus által kisugárzott teljesítményt a

$$P = \frac{1}{6\pi} \mu_0^\alpha |\mathbf{m}|^\beta \omega^\gamma c^\delta$$

alakban kereshetjük, ahol  $\mu_0$  a vákuum permeabilitása,  $c$  a vákuumbeli fénysebesség. Határozzuk meg az ismeretlen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  és  $\delta$  hatványkitevők értékét! (1,0 p)

**2.4.** Adjuk meg a pulzár periódusidejének  $\dot{T}$  növekedési ütemét<sup>1</sup> a pulzár  $T$  periódusidejével, valamint az  $M$ ,  $R$ , és  $m = |\mathbf{m}|$  mennyiségekkel kifejezve, feltételezve, hogy a pulzár energiájának csökkenését teljes egészében a dipólsugárzás okozza. (2,0 p)

**2.5.** A Rák-köd közepén elhelyezkedő Crab pulzár tengely körüli forgásának periódusideje a mérések szerint  $T = 33$  ms, a periódusidő növekedési üteme pedig  $\dot{T} = 4 \cdot 10^{-13}$ . Legfeljebb mekkora lehet a Crab pulzár kora, ha tömege (a neutroncsillagok között standardnak számító)  $M = 1,4M_\odot$  (itt  $M_\odot$  a Nap tömege), sugara pedig  $R = 10$  km? A választ adjuk meg paraméteresen és számszerűleg is! (2,0 p)

**2.6.** Az univerzum jelenleg ismert legerősebb mágneses objektumai a magnetárok. Ezek rendkívül erős mágneses térrel rendelkező pulzárak. Az  $m$  mágneses dipólmomentum és a csillag  $R$  sugarának felhasználásával adjuk meg a magnetár felszínén mérhető legerősebb mágneses tér  $B_{\max}$  indukcióját!

Határozzuk meg  $B_{\max}$  értékét számszerűen is az  $R = 10$  km sugarú és  $M = 1,4M_\odot$  tömegű SGR1806–20 jelű magnetár esetében, amely tengely körüli forgásának periódusideje  $T = 7,5$  s, a periódusidő növekedési üteme pedig  $\dot{T} = 8 \cdot 10^{-11}$ . (2,0 p)

<sup>1</sup>Ebben a feladatban és a továbbiakban az  $x$  fizikai mennyiség változási gyorsaságát (idő szerinti deriváltját) a mennyiség jele fölé írt ponttal jelöljük:

$$\dot{x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

**2.7.** Ismert, hogy homogén mágneses térben az indukcióvektorra merőlegesen mozgó elektron körpályára kényszerül. Ha a mágneses mező erős, az elektron viselkedése kvantumossá válik, és csak bizonyos energiájú állapotai lesznek megengedettek. A kvantumelektrodinamika szerint, ha tovább növeljük a mágneses indukció nagyságát, egy bizonyos  $B_{\text{krit}}$  kritikus érték körül a klasszikusan körpályán mozgó elektron sebessége már az alapállapotban is relativisztikusan nagyra válik. Ilyen erős mágneses térben érdekes, új fizikai folyamatok mehetnek végbe: például elektron-positron párok keletkezhetnek, és végbemehetnek foton-foton szóródások is (ami az elektrodinamikai szuperpozíciós elv sérülését jelenti).

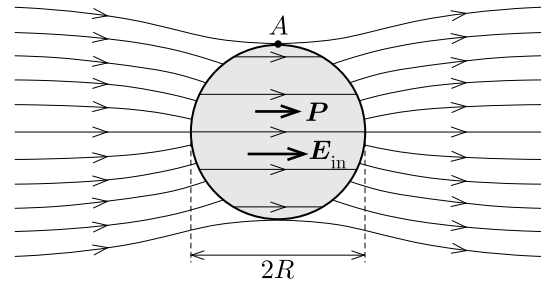
Becsüljük meg  $B_{\text{krit}}$  nagyságrendjét! Állapítsuk meg, hogyan viszonyul  $B_{\text{krit}}$  az SGR1806–20 jelű magnetár felszínén mérhető  $B_{\text{max}}$  értékhez? (1,5 p)

### 3. feladat: Nanogolyócska csapdázása lézercsippessel.

A lézercsipesz egy olyan laboratóriumi berendezés, amelyben a tér egy kis tartományában fókuszált lézernyalábbal lehet mikroszkopikus méretű testeket csapdázni („megfogni”), mozgatni. A működés alapelve az, hogy a fókuszoltban kialakuló, inhomogén intenzitású tartományban olyan erő hat a csapdázni kívánt testre, amely a kis intenzitású hely felől a nagy intenzitású hely felé mutat. Ez a csapdázó erő a lézervény hullámhosszánál sokkal nagyobb méretű testek esetén a geometriai optika törési törvényével magyarázható, míg a hullámhossznál sokkal kisebb méretű (nanoméretű) testek esetén a maxwelli elektrodinamika alapján számolható ki. Ebben a feladatban az utóbbi utat kell követnünk: a lézervény hullámhosszánál sokkal kisebb méretű, latexből készült, töltetlen, szigetelő nanogolyócska viselkedését vizsgáljuk lézercsippeszen. A tömör,  $m$  tömegű és  $R$  sugarú nanogolyócska homogén,  $\varepsilon_r$  relatív dielektromos állandójú anyagból készült. A feladat megoldása során a nehézségi erő hatása mindvégig elhanyagolható.

Szükségünk lesz arra az ismeretre, hogyan viselkedik a golyócska elektromos térben. Ehhez képzeljük el, hogy a golyócskát időben állandó, homogén,  $\mathbf{E}$  térerősségű elektromos térbe helyezzük. Az elektromos tér hatására a golyócskában homogén  $\mathbf{P}$  polarizáció (elektromos dipólmomentum-sűrűség) és homogén  $\mathbf{E}_{in}$  elektromos térerősség alakul ki, melyek között a

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E}_{in}$$



1. ábra

összefüggés áll fenn. Megmutatható, hogy a golyócskán kívüli elektromos tér úgy írható le, mintha a homogén  $\mathbf{E}$  elektromos tér és egy, a golyócska közepén elhelyezkedő,  $\mathbf{p} = \mathbf{P} \cdot V$  dipólmomentumú elektromos dipólus<sup>2</sup>terének szuperpozíciója lenne, ahol  $V$  a golyócska térfogata.

**3.1.** Mutassuk meg, hogy a golyócska dipólmomentuma és az  $\mathbf{E}$  térerősség között fennáll a

$$(1) \quad \mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$$

összefüggés, és adjuk meg az  $\alpha$  tényező értékét  $\varepsilon_r$  és  $R$  felhasználásával! (Útmutatás: Vizsgáljuk az elektromos teret az 1. ábrán látható  $A$  pont környékén, a gömbön belül és azon kívül!) (2,5 p)

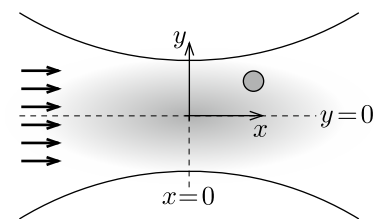
**3.2.** Időfüggetlen, homogén elektromos térben egy elektromos dipólusra nem hat erő. Felhasználva, hogy egy indukált  $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$  dipólmomentumú dipólus elektrosztatikus energiája az  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$  térerősségű pontban  $-\frac{1}{2}\alpha \mathbf{E}^2$ , mutassuk meg, hogy inhomogén, sztatikus elektromos tér jelenlétében olyan erő hat a dipólusra, melynek  $x$ -komponense

$$(2) \quad F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

és hasonló összefüggés igaz a másik két erőkomponensre is. (1,0 p)

A nanogolyócskát egy erősen fókuszált, polarizált lézernyalábbba helyezzük (2. ábra). A lézervény a fókusz tartomány minden pontjában  $x$ -irányba halad, helyről-helyre változó amplitúdójú,  $\omega$  körfrekvenciájú síkhullámmal közelíthető. A lézervény (időátlagolt) intenzitása a hely függvényében az

$$I(x, y, z) = I_0 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} \right)$$



2. ábra

függvénnyel írható le az  $|x| \ll a$ ;  $|y| \ll b$ ;  $|z| \ll b$  tartományban ( $a, b > 0$ ).

<sup>2</sup>Egy  $\mathbf{p}$  dipólmomentumú dipólustól  $\mathbf{r}$  távolságra az elektromos térerősséget a következő formula adja meg:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}|\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^5}.$$

**3.3.** Adjuk meg a lézerfény  $E(x, y, z)$  amplitúdóját az  $I(x, y, z)$  intenzitás felhasználásával! (1,0 p)

**3.4** A golyócskát a lézerfény időben változó elektromos tere polarizálja, a pillanatnyi dipólmomentum és a térerősség között minden időpillanatban fennáll az (1) összefüggés. Belátható, hogy egy változó amplitúdójú síkhullámban is érvényes a dipólra ható erőt megadó (2) összefüggés. Mutassuk meg, hogy a lézerfény intenzitásának hely szerinti változása miatt a golyócskára ható erő komponensei

$$(3) \quad F_x^{\text{csapda}} = \gamma \frac{\partial I(x, y, z)}{\partial x}, \quad F_y^{\text{csapda}} = \gamma \frac{\partial I(x, y, z)}{\partial y}, \quad F_z^{\text{csapda}} = \gamma \frac{\partial I(x, y, z)}{\partial z}$$

alakban írhatók. Fejezzük ki  $\gamma$  értékét  $\alpha$  segítségével! (1,5 p)

**3.5.** Hogyan mozog a nanogolyócska, ha egyensúlyi helyzetéből  $y$  irányban kicsiny  $d \ll b$  távolsággal kimozdítjuk? Adjuk meg a mozgást jellemző paraméter(ek)e)t  $I_0$ ,  $b$ ,  $m$  és  $\alpha$  felhasználásával. (1,0 p)

A nanogolyócskára  $x$ -irányban a (3) összefüggéssel leírt  $F_x^{\text{csapda}}$  erőn kívül fellép még egy, a sugárzási nyomásból származó  $F^{\text{sug}}$  erő is. Ennek oka, hogy a golyócska a beeső lézerfény egy részét  $P^{\text{sug}}$  teljesítménnyel elnyeli, miközben ugyanekkora teljesítménnyel dipól-sugárzás formájában ki is sugározza azt. Egy  $\omega$  körfrekvenciával rezgő (harmonikusan változó erősségű) elektromos dipólus által kisugárzott teljesítményt a

$$P^{\text{sug}} = \frac{\mu_0 |\mathbf{p}|^2 \omega^4}{12\pi c}$$

összefüggés adja meg, ahol  $|\mathbf{p}|$  a rezgés során a maximális dipólmomentum. (Az erő kiszámításánál tekinthetjük úgy, mintha ezt a teljesítményt a rezgő dipólus izotrop módon sugározná ki.)

**3.6.** Adjuk meg a nanogolyócskára ható  $F^{\text{sug}}$  erő nagyságát az adott pontban mérhető  $I(x, y, z)$  intenzitás,  $\alpha$  és  $\omega$  segítségével! (1,5 p)

**3.7.** Határozzuk meg, hogy  $x$ -irányban az origótól mekkora  $\xi$  távolsággal tolódik el a sugárzási nyomás hatására a nanogolyócska egyensúlyi helyzete. A választ a lézerfény  $\lambda$  hullámhossza, a golyócska  $R$  sugara, az  $a$  paraméter, és az  $\epsilon_r$  relatív permittivitás segítségével adjuk meg. Számítsuk ki az eltolódás értékét számszerűen is, ha ismert, hogy  $\lambda = 1000$  nm,  $R = 10$  nm,  $a = 20$   $\mu$ m, és  $\epsilon_r = 2,5$ . (1,5 p)